NIK AZIS NIK PA
FARIDAH MOHAMED IBRAHIM

# Konsepsi Murid Berumur 10 Tahun tentang Pembahagian Melibatkan Sifar

*ABSTRAK: Kajian ini meneliti konsepsi murid berumur 10 tahun tentang pembahagian melibatkan sifar dengan berlandaskan teori konstruktivisme radikal. Data dikumpulkan daripada 7 orang murid melalui 2 sesi temu duga klinikal yang melibatkan tugas menggambarkan konsep bahagi, menggambarkan konsep sifar, menyelesaikan masalah bahagi tanpa dan dengan sifar, dan menyelesaikan masalah darab melibatkan sifar. Majoriti murid didapati menggambarkan konsep bahagi dengan menulis simbol standard bagi operasi bahagi dan simbol bagi pembahagian panjang, manakala simbol bagi sifar pula dibaca sebagai "kosong" dan ditafsirkan sebagai tidak ada apa-apa atau tidak ada nombor. Seterusnya, murid menggunakan kaedah pengukuran, pemetakan, dan penolakan berulang, baik secara sendiri mahupun secara gabungan untuk menyelesaikan masalah bahagi tanpa sifar. Sesetengah murid turut menggunakan algoritma pembahagian panjang untuk menyokong jawapan mereka. Bagi kedua-dua pembahagian melibatkan sifar dan tanpa sifar, semua murid menggunakan penjelasan berasaskan peraturan untuk menjustifikasikan jawapan mereka, dalam mana penjelasan tersebut mengandungi beberapa unsur yang berbeza. Sebagai tambahan, penyelesaian murid bagi masalah pembahagian tanpa sifar nampaknya berkisar pada tafsiran mereka tentang operasi bahagi, manakala penyelesaian bagi masalah bahagi melibatkan sifar pula nampaknya berkisar pada tafsiran mereka tentang sifar sebagai "kosong".*

*KATA KUNCI: Murid Sekolah Rendah, bahagi, darab, sifar, konsepsi, dan konstruktivisme radikal.*

**Prof. Dr. Nik Azis Nik Pa** ialah Pensyarah di Fakulti Pendidikan UM (Universiti Malaya), Kuala Lumpur, Malaysia. Alamat emel beliau adalah: nikazis@um.edu.my. Manakala **Dr. Faridah Mohamed Ibrahim** ialah Pensyarah di Pusat Asasi Sains UM (Universiti Malaya), Kuala Lumpur, Malaysia. Alamat emel beliau adalah: faridah124@um.edu.my

## PENGENALAN

Murid Sekolah Rendah mula mempelajari pembahagian nombor bulat secara formal pada Tahun Dua, dalam mana perkara tersebut diajar dengan menggunakan kaedah pemetakan dan pengukuran. Algoritma pembahagian panjang pula mula diajar kepada mereka pada Tahun Empat. Pembahagian nombor bulat, khususnya pembahagian melibatkan sifar, adalah satu konsep yang sukar (Tsamir, Sheffer & Tirosh, 2000). Dalam tiga abad kebelakangan ini, konsep sifar dan pembahagian dengan sifar seringkali mendapat perhatian para pengkaji luar negara dan perkara yang menjadi fokus perbincangan atau penyelidikan mereka, termasuklah *pemahaman murid* (Reys & Grouws, 1975; dan Seidelmann, 2001), *pemahaman guru dan guru pelatih* (Wheeler & Feghali, 1983; Ball, 1990; dan Crespo & Nicol, 2006), *definisi dan model* (Knifong & Burton, 1980; dan Watson, 1991), dan *perkembangan konseptual* (Blake & Verhille, 1985; Wellman & Miller, 1986; Kaplan, 1999; dan Seiffe, 2000).

Secara khusus, R.E. Reys dan D.A. Grouws (1975) mendapati bahawa ramai murid gred empat dan lapan tidak menganggap sifar sebagai nombor dan sebahagian kekeliruan yang mereka perhatikan dalam penyelesaian masalah pembahagian melibatkan sifar adalah berpunca daripada tindakan murid menyamakan "sifar" dengan "kosong" atau "tidak ada apa-apa". R. Blake dan C. Verhille (1985) pula menjelaskan bahawa analogi "sifar sebagai kosong atau tidak ada apa-apa" boleh menghalang pengajaran yang berkesan tentang struktur sifar yang kompleks.

Seterusnya, P. Tsamir, R. Sheffer dan D. Tirosh (2000) mendapati bahawa murid Sekolah Menengah kurang memahami pembahagian dengan sifar disebabkan oleh pemahaman intuitif mereka tentang nombor, khususnya pemahaman bahawa operasi aritmetik yang membabitkan nombor mesti menghasilkan jawapan berbentuk nombor. M.M. Wheeler dan I. Feghali (1983) pula mendapati bahawa guru pelatih Sekolah Rendah keberatan untuk menganggap sifar sebagai nombor dan mereka melakukan kesilapan yang konsisten dalam penyelesaian masalah pembahagian melibatkan sifar. Hal yang sama diperhatikan oleh D.L. Ball (1990), dalam mana beliau mendapati kebanyakan calon guru Sekolah Rendah dan Sekolah Menengah tidak dapat memberi penjelasan yang munasabah secara matematik kepada jawapan mereka bagi masalah pembahagian yang melibatkan sifar.

Menurut S. Crespo dan C. Nicol (2006), kajian lepas memberikan gambaran yang tidak positif tentang pemahaman murid dan bakal guru Sekolah Rendah dan Sekolah Menengah tentang konsep sifar dan pembahagian melibatkan sifar. S. Crespo dan C. Nicol mengelaskan respons murid tentang pembahagian yang membabitkan sifar ke dalam dua kategori, iaitu penjelasan berasaskan peraturan dan penjelasan berasaskan penaakulan. Sebaliknya, E. Levenson, P. Tsamir dan D. Tirosh (2007) menggunakan tiga kategori utama untuk mengelaskan respons murid, iaitu: (1) Penjelasan berasaskan matematik, yang menggunakan konsep matematik seperti definisi pendaraban sebagai penambahan berulang; (2) Penjelasan berasaskan perkara praktikal, yang menggunakan bahan manipulatif, objek konkrit, gambar rajah, lukisan, atau cerita dalam kehidupan harian; dan (3) Penjelasan berasaskan peraturan, yang menggunakan peraturan atau generalisasi yang tertentu.

Fenomena bermasalah yang dikenal pasti dalam pendidikan matematik di luar negara menimbulkan persoalan, sama ada fenomena seperti itu turut berlaku di negara kita? Justeru, kami menjalankan kajian kes yang berlandaskan konstruktivisme radikal untuk mengenal pasti enam perkara asas, iaitu: (1) Gambaran mental yang dimiliki oleh murid berumur 10 tahun tentang konsep bahagi dan nombor sifar; (2) Penyelesaian masalah pembahagian nombor bulat yang tidak melibatkan sifar oleh murid berumur 10 tahun; (3) Penyelesaian masalah pembahagian yang melibatkan sifar oleh murid berumur 10 tahun; (4) Penjelasan yang diberikan oleh murid berumur 10 tahun tentang penyelesaian masalah pembahagian yang tidak membabitkan dan membabitkan sifar; (5) Pengaruh kaedah yang digunakan oleh murid berumur 10 tahun dalam penyelesaian masalah pembahagian nombor bulat yang tidak melibatkan sifar terhadap penyelesaian masalah pembahagian yang melibatkan sifar; dan (6) Penyelesaian masalah pendaraban membabitkan sifar oleh murid berumur 10 tahun.

Dalam kajian ini, kaedah pemetakan melibatkan tafsiran bahawa pembahagi, iaitu bilangan subset, adalah diketahui dan murid perlu menentukan saiz bagi setiap subset. Manakala kaedah pengukuran pula melibatkan tafsiran bahawa pembahagi, iaitu saiz subset, adalah diketahui dan murid perlu menentukan bilangan subset. Seterusnya, kaedah penolakan berulang melibatkan tafsiran bahawa pembahagi, iaitu bilangan benda yang dibawa keluar setiap kali, adalah diketahui dan murid perlu menentukan bilangan bawa keluar yang dapat dilakukan. Istilah "konsepsi" pula merujuk abstraksi pola-pola yang boleh digeneralisasikan daripada persepsi dan urutan operasi mental (Von Glasersfeld, 1995). Oleh itu, konsep "pembahagian membabitkan sifar" yang dimiliki oleh murid terdiri daripada perkara yang diabstrakkan oleh mereka daripada pelbagai pengalaman pembahagian yang melibatkan sifar.

## BAHAN DAN KAEDAH

Peserta kajian ini terdiri daripada tiga orang murid lelaki dan empat orang murid perempuan berumur 10 tahun yang sedang belajar di Tahun Empat dari sebuah Sekolah Rendah (SR) di Kuala Lumpur, Malaysia. Mereka dipilih berdasarkan kesesuaian mereka, yakni kebolehan berkomunikasi secara lisan, kerelaan diri, dan minat mereka untuk terlibat dalam kajian. Secara khusus, dua peserta kajian mempunyai pencapaian tinggi, tiga mempunyai pencapaian sederhana, dan dua orang lagi mempunyai pencapaian rendah dalam ujian Matematik yang dijalankan oleh sekolah. Faktor gender dan pencapaian Matematik turut digunakan dalam pemilihan peserta kajian, dengan andaian data yang kaya dapat diperoleh daripada peserta kajian yang tidak homogen.

Teknik temu duga klinikal (Steffe & Olive, 2010) digunakan untuk mengumpul data. Setiap murid ditemu duga sebanyak dua kali, dalam mana setiap temu duga mengambil masa 40 minit hingga 50 minit bergantung pada respons murid. Dalam temu duga tersebut, empat tugas dikemukakan kepada murid, iaitu: (1) Tugas gambaran mental membabitkan murid menyatakan apa yang terbayang dalam fikiran mereka apabila perkataan "bahagi" disebut dan apabila mereka membaca ayat 0 ÷ 3 yang tertulis di atas kad dan menggambarkan "0" yang terdapat dalam ayat tersebut; (2) Tugas menyelesaikan masalah 12 ÷ 4, 8 ÷ 3, dan 7 ÷ 7, serta memberi penjelasan tentang penyelesaian yang dilakukan; (3) Tugas menyelesaikan masalah 0 ÷ 3 dan 3 ÷ 0, serta memberi penjelasan tentang penyelesaian yang dilakukan; dan (4) Tugas menyelesaikan masalah 0 x 3 dan 3 x 0, serta memberi penjelasan tentang penyelesaian yang dilakukan. Dalam semua tugas ini, kertas, pensel, dan bahan manipulatif disediakan untuk membolehkan murid membentuk perwakilan, lakaran, atau catatan tertentu jika perlu.

Rakaman video temu duga, catatan dan lakaran yang dibuat oleh murid, dan catatan yang dibuat oleh pengkaji semasa menjalankan temu duga membentuk data bagi kajian ini. Analisis data pula dibuat dalam empat peringkat, iaitu: (1) Rakaman video ditranskripsikan ke dalam bentuk data bertulis; (2) Data bertulis bersama dengan catatan pengkaji dan lukisan serta catatan murid digunakan untuk membentuk kes bagi setiap peserta; (3) Analisis merentasi kes dibuat untuk mengenal pasti pola tingkah-laku yang tertentu; dan (4) Konsepsi murid dirumuskan dengan berlandaskan pola tingkah-laku yang telah dikenal pasti. Dalam kajian ini, kami memberi fokus kepada tingkah-laku lisan dan bukan lisan murid semasa mereka menyelesaikan masalah pembahagian dan pendaraban yang tertentu.

## HASIL KAJIAN DAN PERBINCANGAN

Kajian ini mendapati majoriti murid menggambarkan konsep bahagi secara abstrak dengan menulis dua simbol, iaitu simbol standard bagi operasi bahagi dan simbol bagi pembahagian panjang. Gambaran mental yang lain ialah simbol standard bagi operasi bahagi semata-mata, empat operasi asas dalam aritmetik, dan nombor selain sifar serta benda dalam kehidupan harian yang boleh dibahagi seperi gula-gula dan ikan. Lihat jadual di bawah ini.

Jadual 1
Gambaran Mental dan Tafsiran Ayat Bahagi

| Murid | Gambaran Mental bagi Perkataan Bahagi | Tafsiran Ayat 0 ÷ 3 |
|---|---|---|
| Abu | Menulis simbol ÷ dan √ | Baca sebagai "kosong bahagi tiga", dalam mana 0 ditafsirkan sebagai tidak ada apa-apa. |
| Afiq | Menulis simbol ÷ | Baca sebagai "kosong bahagi tiga", dalam mana 0 ditafsirkan sebagai tidak tak ada nombor. |
| Aimi | Menulis nombor 10, 12, 13, 14, 15, 16, dan menyatakan bahawa semua nombor boleh dibahagi kecuali kosong. Tulis perkataan gula-gula, pensel, pisau, ikan dan menyatakan semua benda boleh dibahagi. | Baca sebagai "kosong bahagi tiga", dalam mana 0 ditafsirkan sebagai tidak ada apa-apa. |
| Azam | Menulis simbol ÷, x, -, + dan menyatakan bahawa mereka adalah operasi yang dipelajarinya. | Baca sebagai "kosong bahagi tiga", dalam mana 0 ditafsirkan sebagai tidak ada apa-apa. |
| Nurul | Menulis simbol ÷ dan √ | Baca sebagai "kosong bahagi tiga", dalam mana 0 ditafsirkan sebagai tidak ada apa-apa. |
| Syaki | Menulis simbol ÷ dan √ | Baca sebagai "kosong bahagi tiga", dalam mana 0 ditafsirkan sebagai tidak ada nombor. |
| Umi | Menulis simbol ÷ dan √ | Baca sebagai "kosong bahagi tiga", dalam mana 0 ditafsirkan sebagai tidak ada apa-apa. |

Seterusnya, ayat 0 ÷ 3 dibaca sebagai "kosong bahagi tiga", dalam mana simbol bagi sifar dibaca sebagai "kosong". Secara khusus, lima daripada tujuh orang murid mentafsirkan "0" sebagai "tidak ada apa-apa", manakala dua orang murid yang lain pula mentafsirkannya sebagai "tidak ada nombor". Dengan kata lain, majoriti murid mentafsirkan 0 sebagai keadaan yang tidak ada apa-apa, manakala dua orang murid yang lain pula mentafsirkan 0 sebagai keadaan yang tidak ada sebarang nombor.

Bagi masalah 12 ÷ 4, 8 ÷ 3, dan 7 ÷ 7, kajian ini telah mengenal pasti tiga kaedah penyelesaian dan satu algoritma pembahagian panjang yang digunakan oleh murid. Secara khusus, enam orang murid menggunakan kaedah pengukuran untuk menyelesaikan masalah pembahagian nombor bulat (lihat jadual 2). Sebagai tambahan, dua orang daripada mereka turut menggunakan algoritma pembahagian panjang untuk menyokong jawapan mereka. Seterusnya, seorang daripada mereka tidak mengambil kira baki apabila menyelesaikan masalah pembahagian nombor bulat dengan baki.

Kajian ini juga mendapati dua orang murid menggunakan kedua-dua kaedah pengukuran dan pemetakan untuk menyelesaikan masalah pembahagian nombor bulat. Sebagai tambahan, seorang daripada mereka turut menggunakan algoritma pembahagian panjang bagi menjelaskan jawapannya. Seterusnya, seorang murid didapati menggunakan tiga kaedah, iaitu kaedah pengukuran, pemetakan, dan penolakan berulang untuk menyelesaikan masalah pembahagian nombor bulat. Akhir sekali, seorang murid didapati menggunakan kaedah pemetakan untuk menyelesaikan masalah pembahagian nombor bulat tanpa dan dengan baki.

Berasaskan kategori yang dimajukan oleh E. Levenson, P. Tsamir dan D. Tirosh (2007), secara kasar respons murid boleh dikelaskan sebagai penjelasan berasaskan Matematik, dalam mana murid turut menggunakan gambar rajah bagi konteks pengukuran dan pemetakan untuk menyokong penjelasan mereka.

Jadual 2
Penyelesaian Masalah Pembahagian Nombor Bulat

| Murid | Masalah 12 ÷ 4 | Masalah 8 ÷ 3 | Masalah 7 ÷ 7 |
|---|---|---|---|
| Abu | Guna kaedah pengukuran. | Guna kaedah pengukuran, tetapi tidak mengambil kira baki. | Guna kaedah pengukuran. |
| Afiq | Guna kaedah pengukuran dan pemetakan serta menyokong jawapannya dengan menggunakan algoritma pembahagian panjang. | Guna kaedah pengukuran dan pemetakan serta menyokong jawapannya dengan menggunakan algoritma pembahagian panjang. | Guna kaedah pengukuran dan pemetakan. |
| Aimi | Guna kaedah pengukuran. | Guna kaedah pengukuran. | Guna kaedah pengukuran. |
| Azam | Guna kaedah pemetakan. | Guna kaedah pemetakan. | Guna kaedah pemetakan. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Nurul | Guna kaedah pengukuran. | Guna kaedah pengukuran dan menyokong jawapan dengan menggunakan algoritma pembahagian panjang. | Guna kaedah pengukuran. |
| Syaki | Guna kaedah pengukuran dan pemetakan. | Guna kaedah pengukuran dan kaedah penolakan berulang. | Guna kaedah pengukuran, kaedah pemetakan, dan kaedah penolakan berulang. |
| Umi | Guna kaedah pengukuran dan menyokong jawapan dengan menggunakan algoritma pembahagian panjang. | Guna kaedah pengukuran dan menyokong jawapan dengan menggunakan algoritma pembahagian panjang. | Guna kaedah pengukuran. |

Bagi masalah 0 ÷ 3, semua murid memberikan jawapan "kosong" dan penjelasan mereka membabitkan tiga unsur yang berbeza, iaitu: (1) Tiga orang murid menyatakan bahawa "kosong" tidak ada apa-apa, jadi kosong tidak boleh dibahagi; (2) Dua orang murid menyatakan bahawa "kosong" tidak ada nombor, jadi kosong tidak boleh dibahagi; dan (3) Dua orang murid menyebut satu peraturan, iaitu "kosong bahagi sebarang nombor dapat kosong". Lihat jadual 3 di bawah ini.

Jadual 3
Penyelesaian Masalah Pembahagian dan Pendaraban Melibatkan Sifar

| Murid | Ringkasan Respons Murid |
|---|---|
| Abu | 0 ÷ 3 = 0. Kosong tidak boleh dibahagi sebab kosong tidak ada apa-apa. Jadi, kosong bahagi apa-apa pun dapat kosong. Tidak boleh mewakilkan ayat 0 ÷ 3 secara lukisan sebab kosong tidak boleh dilukis. 3 ÷ 0 = 0 sebab sebarang nombor bahagi kosong dapat kosong. 0 x 3 = 0 dan 3 x 0 = 0 sebab apa-apa nombor darab kosong dapat kosong. |
| Afiq | 0 ÷ 3 = 0. Kosong tidak boleh dibahagi sebab kosong tak ada nombor. Jadi, jawapannya adalah kosong. Tidak boleh mewakilkan ayat 0 ÷ 3 secara lukisan sebab tidak boleh melukis kosong. 3 ÷ 0 = 0 sebab semua nombor bahagi kosong dapat kosong. 3 x 0 = 0 dan 0 x 3 = 0 sebab sebarang nombor darab kosong dapat kosong. |
| Aimi | 0 ÷ 3 = 0 sebab kosong tak ada apa-apa, jadi, kosong tidak boleh dibahagi. Malah, kosong bahagi apa-apa nombor dapat kosong. Tidak boleh mewakilkan ayat 0 ÷ 3 secara lukisan sebab kosong tidak boleh dilukiskan. 3 ÷ 0 = 3 sebab kosong tak ada apa-apa, jadi kalau bahagi dengan kosong bermaksud tidak bahagi. Jawapannya ialah tiga. Ayat 3 ÷ 0 boleh diwakilkan sebagai satu himpunan tiga benda. 3 x 0 = 3 dan 0 x 3 = 3 sebab darab dengan kosong sama seperti tidak darab. Jadi, jawapannya ialah nombor yang bukan kosong. |

| | |
|---|---|
| Azam | 0 ÷ 3 = 0, sebab kosong bahagi semua nombor dapat kosong. Tidak boleh mewakilkan ayat 0 ÷ 3 secara lukisan sebab tidak dapat melukis kosong. 3 ÷ 0 = 0 sebab apa-apa nombor bahagi dengan kosong dapat kosong. 0 x 3 = 0 dan 3 x 0 = 0 sebab kosong darab dengan sebarang nombor adalah kosong. Kalau melibatkan kosong, darab atau bahagi menghasilkan jawapan kosong. |
| Nurul | 0 ÷ 3 = 0 sebab kosong tidak ada nombor. Jadi, kosong bahagi apa pun dapat kosong. Ayat 0 ÷ 3 tidak dapat diwakilkan sebab kosong tidak dapat dilukiskan. 3 ÷ 0 = 0 sebab apa-apa nombor bahagi kosong dapat kosong. 3 x 0 = 0 dan 0 x 3 = 0 sebab kosong tidak ada apa-apa. Jadi, darab dengan kosong dapat kosong. |
| Syaki | 0 ÷ 3 = 0 sebab kosong tidak boleh bahagi kerana kosong tidak ada apa-apa. 3 ÷ 0 = 0 sebab apa-apa nombor bahagi kosong dapat kosong. Tidak boleh mewakilkan ayat 0 ÷ 3 sebab tidak boleh melukis kosong. 3 x 0 = 0 dan 0 x 3 = 0 sebab kosong tak ada nombor. Jadi, darab kosong mesti dapat kosong. |
| Umi | 0 ÷ 3 = 0 sebab kosong bahagi sebarang nombor dapat kosong. Tidak boleh mewakilkan ayat 0 ÷ 3 sebab kosong tidak boleh dilukis. 3 ÷ 0 = 0, 3 x 0 = 0, dan 0 x 3 = 0 sebab darab atau bahagi dengan kosong akan dapat kosong. |

Seterusnya bagi masalah 3 ÷ 0, enam orang murid memberi jawapan "kosong" dan menjelaskan bahawa "apa-apa nombor bahagi kosong dapat kosong". Respons mereka kepada masalah 3 ÷ 0 tidak sama dengan respons mereka kepada masalah 0 ÷ 3, dalam mana bagi masalah pertama mereka terus menyebut peraturan, "apa-apa nombor bahagi kosong dapat kosong" tanpa terlebih dahulu menyatakan ciri khusus bagi "kosong". Seorang murid yang lain pula memberi jawapan "tiga" dan penjelasan yang diberi untuk menjustifikasikan jawapannya ialah kosong tidak ada apa-apa, jadi apa-apa nombor bahagi dengan kosong bermaksud tidak bahagi. Beliau melukis satu himpunan tiga benda untuk menggambarkan jawapannya. Dengan kata lain, oleh sebab kosong menandakan "tidak ada apa-apa", maka pembahagian dengan kosong dianggap sebagai tidak melakukan pembahagian, jadi yang dibahagi kekal seperti asal. Ringkasnya, semua murid menggunakan penjelasan berasaskan peraturan yang melibatkan salah satu daripada dua unsur yang berbeza untuk menjustifikasikan jawapan mereka bagi masalah tiga bahagi sifar.

Akhir sekali, bagi kes 3 x 0 dan 0 x 3, penjelasan murid boleh dikelaskan kepada empat jenis, iaitu: (1) Jawapannya kosong, sebab sebarang nombor darab dengan kosong dapat kosong; (2) Jawapannya kosong, sebab kosong tidak ada apa-apa; (3) Jawapannya kosong, sebab kosong tidak ada nombor; dan (4) Jawapannya tiga, sebab kosong tidak ada apa-apa, jadi darab dengan kosong macam tidak melakukan pendaraban. Semua penjelasan ini boleh dikelaskan sebagai penjelasan berasaskan peraturan. Sebagai tambahan, cara setiap murid menyelesaikan kedua-dua masalah

0 x 3 dan 3 x 0 adalah sama, walaupun enam daripada mereka mendapat kosong sebagai jawapan, manakala seorang lagi pula mendapat tiga sebagai jawapan.

Secara keseluruhan, kajian ini mendapati bahawa kebanyakan murid menggambarkan konsep bahagi secara abstrak dengan menggunakan simbol standard bagi operasi bahagi dan simbol pembahagian panjang. Simbol bagi sifar pula dibaca sebagai "kosong" dan bukan sebagai "sifar", dalam mana lima orang murid mentafsirkan "kosong" sebagai "tidak ada apa-apa", manakala dua orang murid yang lain pula mentafsirkannya sebagai "tidak ada nombor". Nampaknya, dua orang murid ini tidak menganggap sifar sebagai satu nombor.

Dapatan ini selaras dengan hasil kajian M.M. Wheeler dan I. Feghali (1983) dan R. Blake dan C. Verhille (1985). Mereka mendapati bahawa "kosong" adalah perkataan yang paling kerap digunakan untuk membaca simbol bagi sifar. Bagi masalah pembahagian nombor bulat yang tidak melibatkan sifar pula, pengukuran merupakan kaedah penyelesaian yang paling menonjol, diikuti oleh kaedah pemetakan dan penolakan berulang. Seterusnya, terdapat beberapa orang murid menggunakan algoritma pembahagian panjang untuk menyokong jawapan yang mereka peroleh melalui kaedah pengukuran atau pemetakan. Sebagai tambahan, terdapat murid yang menggunakan dua atau tiga kaedah seperti kaedah pengukuran, pemetakan, dan penolakan berulang untuk menyelesaikan masalah pembahagian nombor bulat yang tidak melibatkan sifar.

Kajian ini mendapati bahawa tiga kaedah penyelesaian dan satu algoritma yang dinyatakan di atas tidak digunakan oleh murid untuk menyelesaikan masalah sifar bahagi tiga. Sebaliknya, semua murid menggunakan penjelasan berasaskan peraturan untuk menjustifikasikan "kosong" sebagai jawapan. Sebagai tambahan, semua murid tidak dapat menggunakan lukisan untuk menyokong jawapan mereka secara konkrit sebab mereka tidak dapat melukis kosong. Bagi masalah sifar bahagi tiga, kajian ini mendapati bahawa penjelasan berasaskan peraturan tidak melibatkan satu unsur tunggal, tetapi melibatkan tiga unsur yang berbeza, iaitu: (1) Konsepsi bahawa simbol yang disebut sebagai "kosong" mempunyai ciri khusus, iaitu kosong tidak mempunyai apa-apa, jadi kosong tidak boleh dibahagi; (2) Konsepsi bahawa simbol yang disebut sebagai "kosong" mempunyai ciri khusus, iaitu kosong tidak ada nombor, jadi kosong tidak boleh dibahagi; dan (3) Menyebut secara terus peraturan "kosong bahagi sebarang nombor dapat kosong".

Kajian ini juga mendapati bahawa murid tidak menggunakan kaedah dan algoritma yang mereka guna pakai dalam penyelesaian masalah pembahagian nombor bulat yang tidak melibatkan sifar untuk menyelesaikan masalah tiga bahagi sifar. Sebaliknya, semua murid menggunakan penjelasan berasaskan peraturan untuk menjustifikasikan "kosong" atau "tiga" sebagai jawapan. Sebagai tambahan, semua murid tidak dapat menggunakan lukisan untuk menyokong jawapan mereka secara konkrit sebab mereka tidak dapat melukis kosong. Seterusnya, tingkah-laku kebanyakan murid dalam penyelesaian masalah tiga bahagi sifar didapati berbeza dengan tingkah-laku mereka dalam penyelesaian masalah sifar bahagi tiga, dalam mana bagi masalah pertama, mereka terus menyebut peraturan, "apa-apa nombor bahagi kosong dapat kosong" tanpa terlebih dahulu menyatakan ciri khusus bagi "kosong", iaitu kosong bermaksud tidak ada apa-apa atau tidak ada nombor.

Dari satu aspek, hasil kajian ini berbeza daripada hasil kajian R.E. Reys dan D.A. Grouws (1975), dalam mana kajian ini mendapati tidak ada seorang murid pun yang menjustifikasikan jawapannya dengan menggunakan hujah autoriti, iaitu "*guru memberitahu saya perkara tersebut*". Begitu juga, tidak ada seorang murid pun yang menjustifikasikan jawapannya secara konkrit dengan menggunakan hujah logik yang membabitkan idea pengukuran, pemetakan, atau penolakan berulang, atau secara abstrak dengan menggunakan algoritma pembahagian panjang.

Bagi masalah 0 x 3 dan 3 x 0 pula, kajian ini mendapati kebanyakan murid menggunakan penjelasan yang berasaskan peraturan untuk menjustifikasikan jawapan "kosong" yang diperoleh dan mereka tidak membezakan kedua-dua masalah tersebut. Penjelasan berasaskan peraturan yang digunakan oleh semua murid untuk menjustifikasikan jawapan mereka membabitkan empat unsur yang berbeza, iaitu: (1) Jawapannya kosong, sebab sebarang nombor darab dengan kosong dapat kosong; (2) Jawapannya kosong, sebab kosong tidak ada apa-apa; (3) Jawapannya kosong, sebab kosong tidak ada nombor; dan (4) Jawapannya tiga, sebab kosong tidak ada apa-apa, jadi darab dengan kosong macam tidak melakukan pendaraban.

## KESIMPULAN

Kajian ini telah mengenal pasti beberapa perkara yang sebahagiannya memerlukan penelitian yang lebih mendalam. Misalnya, semua murid menggunakan penjelasan berasaskan Matematik, yang mana beberapa orang daripada mereka turut melibatkan gambar rajah, dalam menyelesaikan masalah pembahagian yang tidak melibatkan sifar, tetapi berpindah kepada penjelasan berasaskan peraturan yang tidak melibatkan sebarang gambar rajah apabila mereka menyelesaikan masalah pembahagian melibatkan sifar.

Dalam konteks pembelajaran, S. Crespo dan C. Nicol (2006) menyatakan bahawa penggunaan penjelasan berasaskan peraturan adalah bermasalah sebab perkara itu merumitkan atau tidak menggalakkan murid untuk membina makna secara Matematik tentang pembahagian yang melibatkan sifar. Satu persoalan yang timbul ialah, "*Apakah faktor yang menyebabkan murid hanya menggunakan penjelasan berasaskan peraturan untuk menjustifikasikan jawapan mereka kepada masalah pembahagian yang melibatkan sifar?*". Berdasarkan hasil kajian ini, ada kemungkinan murid tidak menggunakan penjelasan berasaskan perkara praktikal, tetapi bukan penjelasan berasaskan Matematik, sebab mereka tidak dapat melukis rajah untuk mewakilkan "kosong".

Seterusnya, murid didapati membaca simbol bagi sifar sebagai "kosong", dalam mana "kosong" ditafsirkan sebagai tidak ada apa-apa atau tidak ada sebarang nombor. Nampaknya konsep sifar belum berkembang dengan baik dalam fikiran murid yang berumur 10 tahun, malah terdapat murid yang tidak menganggap sifar sebagai satu nombor. Dapatan ini selaras dengan hasil kajian J. Piaget (1942) dan R.E. Reys dan D.A. Grouws (1975).

Dalam hal ini, S. Gialamas dan M.K. McCann (1991) menyatakan bahawa penggunaan perkataan "kosong" boleh menimbulkan kekeliruan apabila pembahagian melibatkan sifar diajar kepada murid secara formal. Manakala R. Blake dan C. Verhille (1985) pula menegaskan bahawa penggunaan perkataan "kosong" memberikan gambaran "keremehan" yang boleh menghalang guru dan murid daripada memberi perhatian yang serius kepada sifar. Oleh itu, satu persoalan yang timbul ialah, "*Apakah bentuk pengalaman pembelajaran yang dapat membantu murid untuk membina dan mengembangkan konsep sifar secara Matematik?*".

Kajian ini mendapati penyelesaian masalah sifar bahagi tiga tidak banyak berbeza dengan penyelesaian masalah tiga bahagi sifar. Misalnya, bagi masalah sifar bahagi tiga, semua murid memberikan "kosong" sebagai jawapan dan justifikasi bagi jawapan tersebut membabitkan tiga unsur yang berbeza, iaitu: (1) Dua orang murid menyebut secara terus peraturan, "kosong bahagi semua nombor dapat kosong" untuk menyokong jawapan mereka; (2) Dua orang murid menyatakan bahawa kosong tidak ada nombor, jadi kosong tidak boleh dibahagi, dan kosong bahagi apa pun dapat kosong; dan (3) Tiga orang murid menyatakan bahawa kosong tidak ada apa-apa, jadi kosong tidak boleh dibahagi, dan kosong bahagi apa-apa pun dapat kosong.

Bagi masalah tiga bahagi sifar pula, enam orang murid menyatakan secara terus bahawa sebarang nombor bahagi kosong dapat kosong, manakala seorang murid yang lain pula menyatakan bahawa kosong tak ada apa-apa, jadi kalau bahagi dengan kosong bermaksud tidak bahagi, maka jawapanya ialah tiga. Ringkasnya, penjelasan yang diberikan oleh murid boleh dikelaskan sebagai penjelasan berasaskan peraturan. Dari satu aspek, dapatan ini berbeza dengan hasil kajian S. Crespo dan C. Nicol (2006) dalam mana mereka mengenal pasti dua kategori bagi penjelasan yang diberi oleh guru pelatih Sekolah Rendah. Satu persoalan yang timbul ialah, "*Apakah faktor yang menyumbang kepada perbezaan yang dinyatakan antara dua hasil kajian ini?*".

Seterusnya, semua murid didapati tidak membezakan tiga darab sifar dengan sifar darab tiga, tetapi penjelasan berasaskan peraturan yang diberikan mengandungi unsur yang berbeza. Misalnya, empat orang murid menyebut secara langsung peraturan, "sebarang nombor darab dengan kosong dapat kosong"; seorang murid menyebut, "kosong tak ada nombor, jadi darab kosong mesti dapat kosong"; seorang murid menyebut, "kosong tak ada apa-apa, jadi darab dengan kosong dapat kosong"; dan seorang murid menyebut, "darab dengan kosong sama seperti tidak darab, jadi jawapannya ialah nombor yang bukan kosong".

Nampaknya, penjelasan berasaskan peraturan bagi masalah pendaraban yang membabitkan sifar mengandungi konsepsi tertentu dan bukan sebahagian besarnya berasaskan ingatan seperti yang dinyatakan oleh D.L. Ball (1990). Dari astu aspek, hasil kajian ini berbeza dengan hasil kajian E. Levenson, D. Tirosh dan P. Tsamir (2004), dalam mana mereka telah mengenal pasti tiga kategori bagi penjelasan yang diberikan oleh murid Sekolah Rendah bagi masalah pendaraban melibatkan sifar.

Pada umumnya, kajian ini mendapati bahawa penyelesaian murid bagi masalah pembahagian yang tidak melibatkan sifar banyak berkisar pada tafsiran mereka tentang operasi bahagi, manakala penyelesaian mereka bagi masalah pembahagian membabitkan sifar pula banyak berkisar pada tafsiran tentang sifar sebagai "kosong". Ada kemungkinan oleh sebab konsepsi murid tentang sifar tidak mencukupi secara Matematik – seperti yang turut diperhatikan oleh pengkaji lain (Wheeler & Feghali, 1983; Ball, 1990; Tsamir, Sheffer & Tirosh, 2000; dan Crespo & Nico, 2006) – maka kaedah yang mereka guna dalam penyelesaian masalah pembahagian yang melibatkan sifar bertumpu kepada kaedah berasaskan penjelasan semata-mata. Perkara ini memerlukan penelitian lanjut.

# Bibliografi

Ball, D.L. (1990). "Prospective Elementary and Secondary Teachers' Understanding of Division" dalam *Journal for Research in Mathematics Education*, 21, ms.132144-.

Blake, R. & C. Verhille. (1985). "The Story of O" dalam *For the Learning of Mathematics*, 5(3), ms.3547-.

Crespo, S. & C. Nicol. (2006). "Challenging Preservice Teachers' Mathematical Understanding: The Case of Division by Zero" dalam *School Science and Mathematics*, 106(2), ms.8497-.

Gialamas, S. & M.K. McCann. (1991). "Zero: The Exceptional Number" dalam *Consortium*, 36, ms.46-.

Kaplan, R. (1999). *The Nothing that Is: A Natural History of Zero*. New York: Oxford University Press.

Knifong, J.D. & G.M. Burton. (1980). "Intuitive Definitions for Division with Zero" dalam *Mathematics Teacher*, 73(3), ms.179186-.

Levenson, E., D. Tirosh & P. Tsamir. (2004). "Elementary School Students' Use of Mathematically-Based and Practically-Based Explanation: The Case of Multiplication" dalam M. Hoines & A. Fuglested ([eds]. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol.3. Bergen, Norway: PME, ms.241248-.

Levenson, E., P. Tsamir & D. Tirosh. (2007). "First and Second Grades Use of Mathematical-Based and Practically-Based Explanations for Multiplication with Zero" dalam *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 29(2), ms.2140-.

Piaget, J. (1942). *The Child's Conception of Number*. London: Routledge & Kegan Paul.

Reys, R.E. & D.A. Grouws. (1975). "Division Involving Zero: Some Revealing Thoughts from Interviewing Children" dalam *School Science and Mathematics*, *75*(7), ms.593605-.

Seidelmann, A. (2001). *Algebra Students' Conceptions of Zero*. Normal, Illinois, USA: Mathematics Department ISU [Illinois State University].

Seiffe, C. (2000). *Zero: The Biography of a Dangerous Idea*. New York: Viking Penguin.

Steffe, L.P. & J. Olive. (2010). *Children's Fractional Knowledge*. New York: Springer.

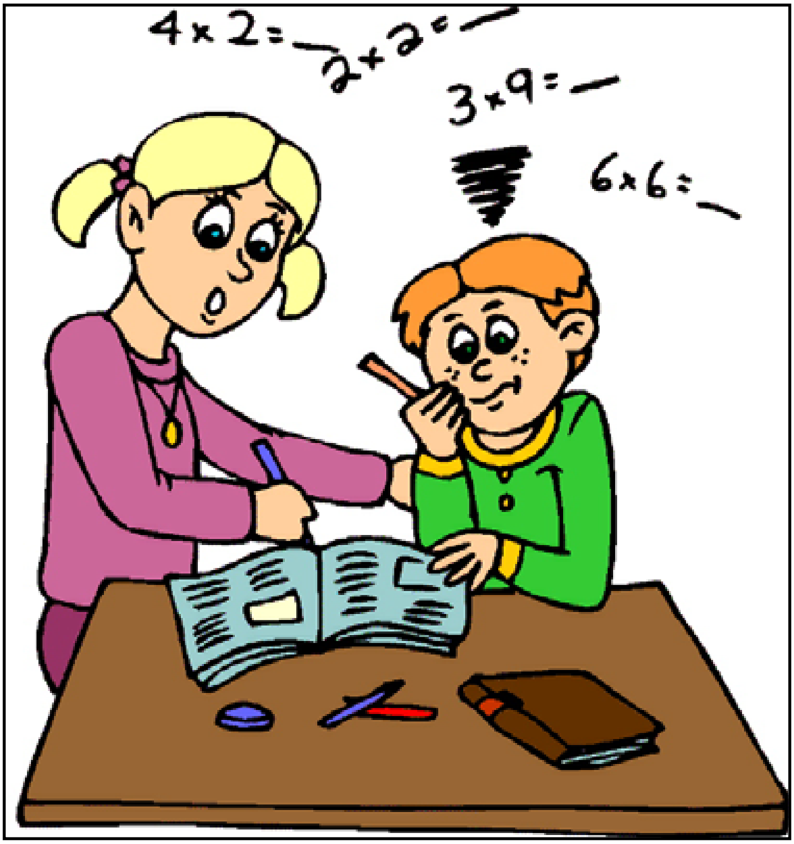
Tsamir, P., R. Sheffer & D. Tirosh. (2000). "Intuition and Undefined Operations: The Case of Division by Zero" dalam *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *22*(1), ms.116-.

Von Glasersfeld, E. (1995). *Radical Constructivism: A Way of Knowing*. London: Falmer Press.

Watson, J.M. (1991). "Models to Show the Impossibility of Division by Zero" dalam *School Science and Mathematics*, 91(8), ms.373376-.

Wellman, H.M. & K.F. Miller. (1986). "Thinking about Nothing: Development of Concept of Zero" dalam *British Journal of Developmental Psychology*, 4, ms.3142-.

Wheeler, M.M. & I. Feghali. (1983). "Much Ado about Nothing: Preservice Elementary School Teachers' Conception of Zero" dalam *Journal for Reserach in Mathematics Education*, 14(3), ms.147155-.




Penyelesaian murid bagi masalah pembahagian yang tidak melibatkan sifar banyak berkisar pada tafsiran mereka tentang operasi bahagi, manakala penyelesaian mereka bagi masalah pembahagian membabitkan sifar pula banyak berkisar pada tafsiran tentang sifar sebagai “kosong”.